

# SVILUPPO DI UN MODELLO NUMERICO DELLA CUPOLA DEL BRUNELLESCHI, FIRENZE

Sabrina Lima Fechine de Alencar,  
Prof. Arch. Roberto Corazzi,  
Prof. Ing. Marília Marcy Cabral De Araújo

## ABSTRACT

Costruita a 55 metri dal suolo, con un'altezza interna di 32,0 metri, un diametro interno di 45,4 metri alzata su un piano ottagonale, la Cupola della Cattedrale di Santa Maria del Fiore, situata a Firenze, è la cupola in muratura più grande costruita senza usare i ponteggi verticali. Ha 584 anni (2020 – 1436 anno di completamento) e un peso di circa 29.000 tonnellate, è considerata una delle più grandi opere dell'ingegneria. Pertanto, guardando la Cupola di Santa Maria del Fiore e il modo in cui è stata costruita, nel presente lavoro ho cercato di sviluppare un modello numerico della Cupola in grado di fornire analisi delle tensioni della struttura rispetto al proprio peso e convalida basata sulla bibliografia scientifica, confrontando diversi modelli per verificare le prestazioni delle tecniche di spinapesce e corda blanda adottate da Brunelleschi. Con lo sviluppo tridimensionale degli elementi della Cupola del Brunelleschi, tre importanti elementi portante sono stati selezionati per l'analisi: cupola interna, settore di base e tamburo. L'inizio della posa spinapesce al livello di 7,00 m ha assicurato una riduzione delle tensioni di trazione negli occhi delle vele interne della Cupola e una diminuzione dell'estensione di questi sforzi negli sponi, di circa 7,10 m. Per quanto riguarda l'uso di una base nella cupola interna sviluppata in blocchi di pietra (0,00 m - 7,00 m), si è verificata una riduzione del 45,50%, in media, dei valori massimi ottenuti nel modello contenente una base di mattoni. Valutando l'uso della tecnica della corda blanda, si è anche scoperto che riduceva di circa 3,50 m l'estensione delle tensioni di trazione negli sponi del modello e si assicurava che la cupola ottagonale potesse essere costruita come una cupola rotante. Confrontando il modello 04, come eseguito da Brunelleschi e il tamburo con la bibliografia, è stato osservato che le zone di trazione e compressione nell'intradosso e estradosso dei modelli coincidevano con quelle della bibliografia, superando l'intervallo di valori indicato nella bibliografia alle estremità. Nel caso della cupola interna, questi valori sono dovuti alla suddivisione del modello in elementi che hanno permesso il flusso di tensioni legate alla spinapesce e alla corda blanda.

**Parole chiave:** Cupola; Brunelleschi; Spinapesce; Corda blanda.

## 1. INTRODUZIONE

Nel 1296, su progetto di uno dei più grandi architetti dell'epoca, Arnolfo di Cambio, iniziò la costruzione della Cattedrale di Santa Maria del Fiore, che era stata progettata con una cupola a base ottagonale e una diagonale interna di circa 36 metri sollevata su un tamburo di circa 10,50 m, cioè la base di supporto su cui sarebbe stata costruita la cupola. Tuttavia, nel 1397 il progetto fu ampliato, così che la Cattedrale di Santa Maria del Fiore divenne la più grande e più bella di tutte nella cristianità (CORAZZI e CONTI, 2005, p.17)<sup>1</sup>.

La Cupola della Cattedrale di Santa Maria del Fiore è posta a 55,00 metri dal suolo, con un'altezza interna di 32,00 m e un diametro interno di circa 45,40 metri eretta su un piano

ottagonale, e è considerata una delle più grandi opere dell'ingegneria. Tale fascino per il monumento storico, che questo anno fa 600 anni, è dovuto al fatto che è stato costruito senza alcun tipo di armatura e ponteggi verticali in legno durante la fase di costruzione, utilizzando, principalmente, mattoni di argilla, cemento pozzolanico e travi di macigno, che conferiscono in gran parte la stabilità della costruzione.

Il grande problema del progetto 1397 era la necessità di costruire la gigantesca cupola, con supporti invisibili. Per le cupole semisferiche o, più in generale, si costruiscono anelli concentrici di mattoni sovrapposti e supponendo che ogni strato di muratura formi un arco orizzontale, mentre questi archi vengono costruiti, si formano anche archi verticali, quindi ogni pietra/mattone viene mantenuto in posizione dalla pressione della muratura adiacente (KING, 2013, p.57)<sup>2</sup>, risultando così una cupola autosufficiente.

La Cupola di Santa Maria del Fiore, tuttavia, ha una base ottagonale, e gli anelli di muratura formati durante la costruzione non sarebbero continui, quindi non ci sarebbe una distribuzione uniforme delle forze in tutte le direzioni. Affinché la costruzione del puntellamento garantisse il sostegno dei mattoni della cupola durante il consolidamento della malta, era necessaria una grande quantità di legno che all'epoca il suo costo per ottenerlo era elevato come quello del marmo, inoltre, i ponteggi avrebbero dovuto sostenere le 29.000 tonnellate per 16 anni (CORAZZI e CONTI, 2005, p.29)<sup>1</sup>. Anche se la questione finanziaria e la resistenza dei montanti in legno non fossero un problema, la rimozione del legname dopo il completamento dei lavori sarebbe poco pratica, per le sue grandi dimensioni.

Pertanto, lo sviluppo di un progetto tecnico esecutivo per la costruzione della Cupola sembrava impossibile. Al termine della costruzione del tamburo e su cui sarebbe stata costruita la Cupola, il 19 agosto 1418 fu bandito il concorso per la costruzione di modelli e progetti per la costruzione della Cupola. Nel concorso, furono suggerite diverse strutture, tuttavia, il modello del Filippo Brunelleschi ha proposto di eliminare completamente la struttura di supporto (CORAZZI e CONTI, 2005, p.28)<sup>1</sup>, e il suo progetto era composto non solo una, ma due cupole e prevedeva anche la riduzione del carico della cupola sostituendo le pietre con mattoni (KING, 2013, p.62)<sup>2</sup>. Pertanto, al fine di coprire la parte superiore della Cupola senza ponteggi, anche nelle regioni che superavano l'angolo critico, Brunelleschi avrebbe posato i mattoni in modo originale, chiamato spinapesce, e avrebbe disposto i mattoni sotto superfici curve per ridurre la tensione agli sproni della costruzione, la corda blanda.

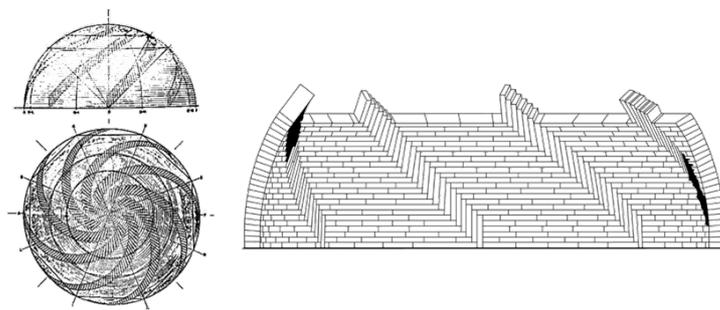
## **2. OBIETTIVO**

Valutando la sontuosità della Cupola di Santa Maria del Fiore e il modo in cui è stata costruita, il presente lavoro cerca di sviluppare un modello numerico della Cupola in grado di fornire analisi delle tensioni della struttura rispetto al proprio peso, dopo la convalida basata sulla bibliografia scientifica, oltre che, confrontano diversi modelli per verificare le prestazioni delle tecniche di spinapesce e corda blanda adottate dal Brunelleschi.

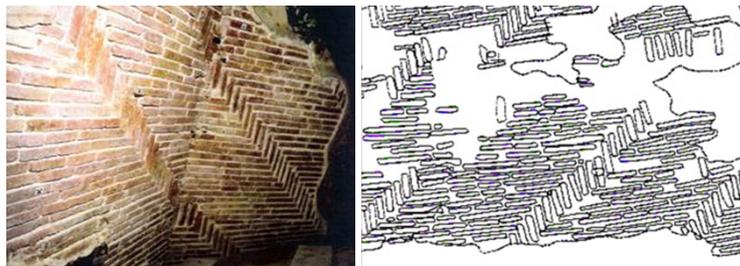
### 3. ASPETTI COSTRUTTIVI

#### 3.1. TECNICA SPINAPESCE

La posa a spinapesce consiste nell'inserimento di mattoni in verticale (di coltello), con il lato lungo perpendicolare al lato lungo dei mattoni disposti orizzontalmente, e vengono disposti ad intervalli regolari (Figura 1). Nelle cupole emisferiche lo sviluppo delle spirali della posa spinapesce crea una curva «lossodromica», cioè una curva che forma angoli costanti con i paralleli, e si avvicina sempre di più ai poli della Cupola (CORAZZI, 2012, p.87)<sup>4</sup>. Un'altra particolarità è che le direzioni della posa spinapesce concorde con il verso del Settentrione, queste sono anche delle linee geodetiche.



**Figura 1:** *Tecnica costruttiva spinapesce: (a) indicata su una cupola sferica; (b) sezione trasversale di una cupola sferica (CORAZZI e CONTI, 2011, p.50-51)<sup>3</sup>.*



**Figura 2:** *(a) Foto eseguita di un dettaglio dei mattoni disposti a spinapesce; (b) Disposizione dei mattoni a corda blanda sull'estradosso della vela esterna (CORAZZI e CONTI, 2011, p.59)<sup>3</sup>.*

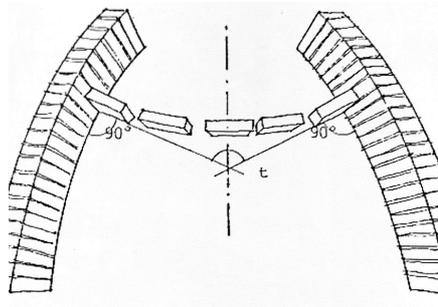
Le “spinapesce” sono dieci per ogni vela e si trovano ad una distanza di circa 1,79 metri l’una dall’altra e avvolge per circa 20,00-25,00 m dalle tre alle quattro vele della Cupola. I mattoni posizionati lungo i meridiani all’imposta della Cupola (Figura 2), cioè di coltello, misurano 45 cm. In altezza e si mantengono sempre perpendicolari rispetto all’orizzontale a qualsiasi quota della Cupola.

### 3.2. TECNICA CORDA BLANDA

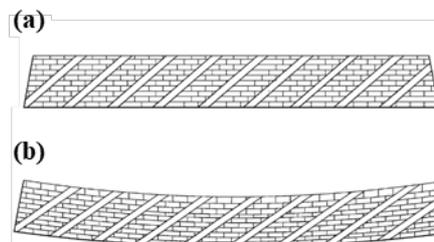
Oltre alla tecnica di spinapesce costruttiva, Brunelleschi usò anche una tecnica chiamata "corda di blanda", che segue una linea curva al centro delle vele e sale vicino agli sproni. L'uso di questa tecnica nella costruzione della Cupola ottagonale deriva dai principi di una tecnica tipica di quelle di rotazione, in cui i mattoni sono disposti lungo le circonferenze: i paralleli.

Nelle cupole sferiche i mattoni, che si trovano nei paralleli, sono inclinano verso il centro. Se nella cupola di Santa Maria del Fiore, che è base ottagonale, i mattoni fossero stati disposti secondo anelli ottagonali, questi, in corrispondenza dei raccordi fra due vele adiacenti, avrebbero formato degli angoli, che sono punti di più alte concentrazioni di tensioni e avrebbe causato delle lesioni, molto pericolose per la stabilità della Cupola (Corazzi e Conti, 2011, p.58)<sup>3</sup>.

Secondo Corazzi e Conti (2011, p.58)<sup>3</sup>, Brunelleschi aveva notato che la cupola ottagonale del Battistero di Firenze era stata costruita in questo modo ed in effetti, agli angoli erano comparse delle lesioni. Per questo scopo in corrispondenza degli spigoli sono stati disposti i mattoni delle vele adiacenti sullo stesso piano (Figura 3) e dispongono secondo le superfici cilindriche.



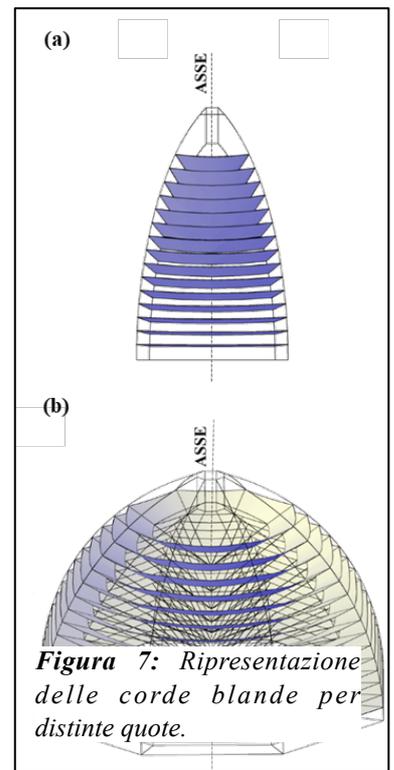
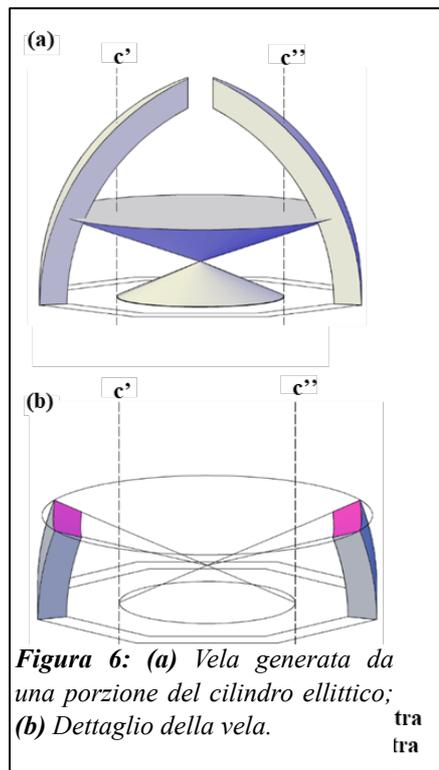
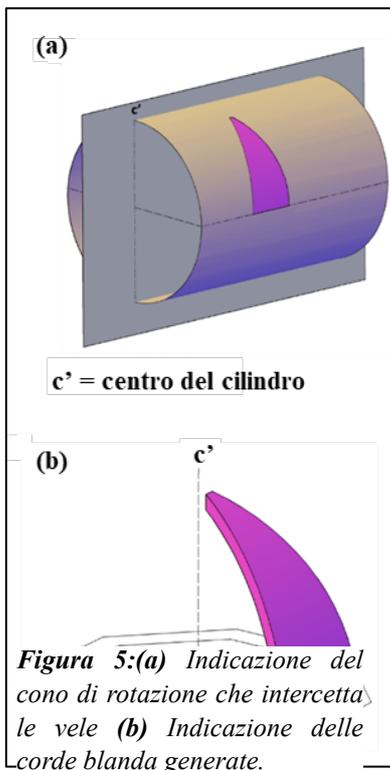
**Figura 3:** Disposizione dei mattoni a corda blanda. (Corazzi e Conti, 2011, p.58)<sup>3</sup>.



**Figura 4:** (a) Spinapesce su un piano orizzontale; (b) Spinapesce su superfici curvilinee.

Continuando questa disposizione dei mattoni anche nelle vele, essi si dispongono secondo superfici curve (Figura 4), in modo da risultare ortogonali ai meridiani della Cupola, come nelle cupole di rotazione.

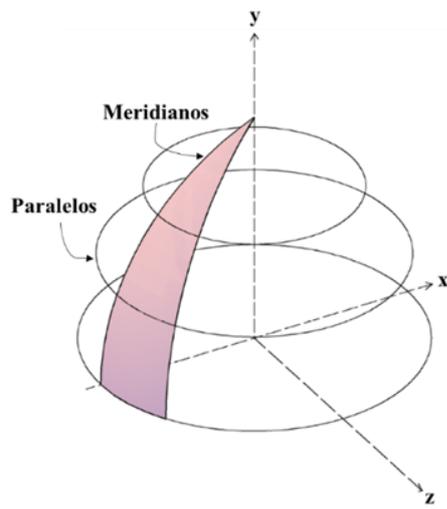
Sapendo che la geometria di una vela può essere ottenuta dalla porzione di un cilindro ellittico (Figura 5), secondo l'interpretazione di Salvatore Di Pasquale, ogni corda blanda è il risultato dell'intersezione di un cono di rotazione con la superficie della vela (Figura 6), mantenendo l'inclinazione costante rispetto al centro del cilindro ellittico, per ogni vela che pone mattoni (Figura 7).



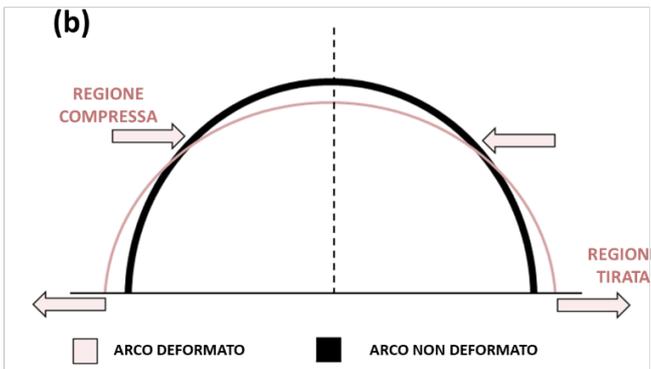
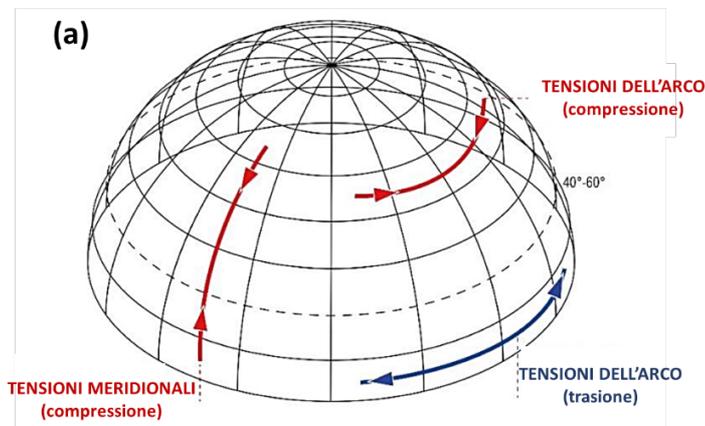
### 3.3. TEORIA DELL'ARCO IN MURATURA

La cupola è una volta a calotta con simmetria centrale, con base poligonale, circolare o ellittica e profilo a semicerchio, parabola o ovoidale. La cupola tipica è a base circolare, generata dalla rotazione di un arco in relazione a un asse centrale e costituita da allineamenti curvi tridimensionali e continui in due direzioni reciprocamente ortogonali: meridiani e paralleli (Figura 8).

Quando sottoposti a carico gravitazionale, le tensioni nei meridiani della cupola in muratura sono compressive (Figura 9). Tuttavia, le tensioni negli anelli sono di compressione nella parte superiore (tra l'angolo 45 ° e 60 ° dalla parte superiore della cupola) e di trazione sotto questo angolo (ERCOLE, 2019, p.17)<sup>5</sup>.



**Figura 8:** Indicazione dei meridiani e dei paralleli di una cupola.



**Figura 9:** (a) Indicazione delle tensioni che agiscono su una cupola di rotazione soggetta al proprio peso (ERCOLE, 2019, p.18)<sup>5</sup>; (b) Indicazione delle tensioni dell'arco.

### 3.4. METODOLOGIA

Per sviluppare, analizzare le tensioni e validare il modello geometrico della Cupola della Cattedrale di Santa Maria del Fiore, è stato sviluppato tridimensionalmente con il software AutoCAD (AutoCAD<sup>®</sup>, 2020)<sup>6</sup> ogni elemento costruttivo che la costituisce. Dei modelli sviluppati, la cupola interna, il settore di base e il tamburo, sono stati utilizzati per la validazione del modello e la verifica delle prestazioni delle tecniche di costruzione adottate dal Brunelleschi: **spinapesce, corda di blanda, base di pietra.**

Per la verifica quantitativa delle prestazioni degli elementi costruttivi, sono stati sviluppati 5 modelli della cupola interna nel software di analisi strutturale di elementi finiti, ABAQUS (Dassalt Systèmes<sup>®</sup>, 2014)<sup>7</sup>, con le specifiche costruttive indicate nella Tabella 1.

**Tabella 1:** Riepilogo dei modelli e dei rispettivi elementi strutturali considerati

	Modello 01	Modello 02	Modello 03	Modello 04	Modello 05
Spinapesce della quota 3,50 mt.	X				
Spinapesce della quota 7,00 mt.		X	X	X	
Base di mattoni (0,00 mt. – 7,00 mt.)			X		
Base a blocchi di pietra (0,00 mt. – 7,00 mt.)		X		X	
Corda blanda dalla quota 7,00 mt.				X	
Mattoni sovrapposti su piani orizzontali					X

Per ciascuno dei modelli sopra descritti, sono stati considerati il carico dalla massa della Lanterna, il sistema intermedio di contrafforti e la cupola esterna.

Come caratteristiche fisiche, sono utilizzati i valori di densità, modulo di elasticità e coefficiente di Poisson dei materiali costituenti della cupola interna, del settore di base e del tamburo con i dati di Barbi et al. (1986)<sup>8</sup>.

**Tabella 2:** Caratteristiche fisiche delle strutture portanti della Cupola del Brunelleschi.

Materiale	Densità	Modulo di elasticità	Coefficiente de Poisson
	(kg/m <sup>3</sup> )	(Pa)	
Blocchi di Pietra	2.570	16.416.626.300	0,194
Mattoni	1.550	10.870.965.725	0,18
Malta	1.750	7.696.258.920	0,27

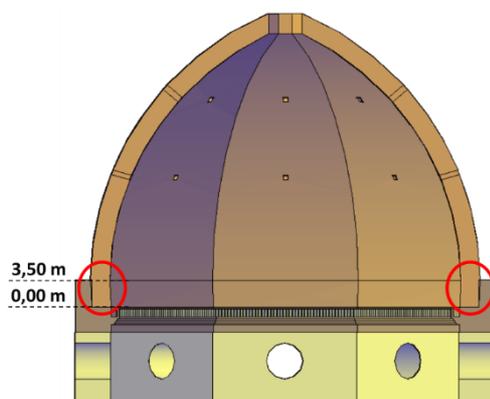
*Fonte: Barbi, et al. (1986)<sup>8</sup>*

#### 4. CONFRONTO TRA I MODELLI DELLA CUPOLA INTERNA PER VERIFICARE LE PRESTAZIONI DEI METODI DI COSTRUZIONE

##### 4.1. MODELLO 01 e MODELLO 03

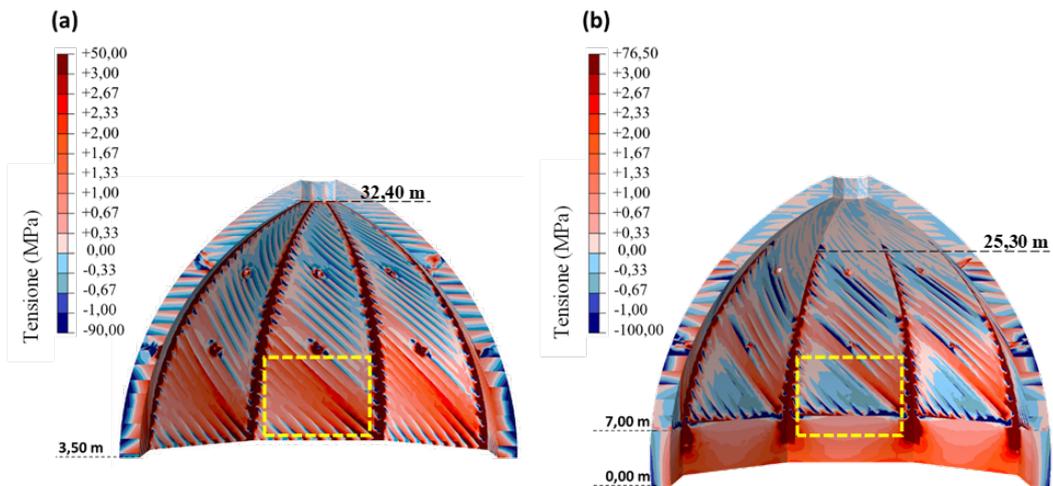
Per verificare la posa spinapesce all'altezza di 7,00 metri, sono state confrontate le tensioni del Modello 01 e del Modello 03, dove il modello 01 abbiamo la posa spinapesce a partire dal livello di 3,50 m, e al modello 03, al livello di 7,00 m, con una base di mattoni dal livello 0,00 a 7,00 m.

Nel Modello 01, poiché l'obiettivo è quello di confrontare le tensioni del proprio peso della Cupola (cupola interna, sistema degli sponi intermedio, cupola esterna e Lanterna) nella posa spinapesce, è stato deciso di iniziare la posa spinapesce al livello di 3,50 metri, come di seguito di questo livello, i mattoni hanno influenza dalla reazione del tamburo, come mostrato nella Figura 10.

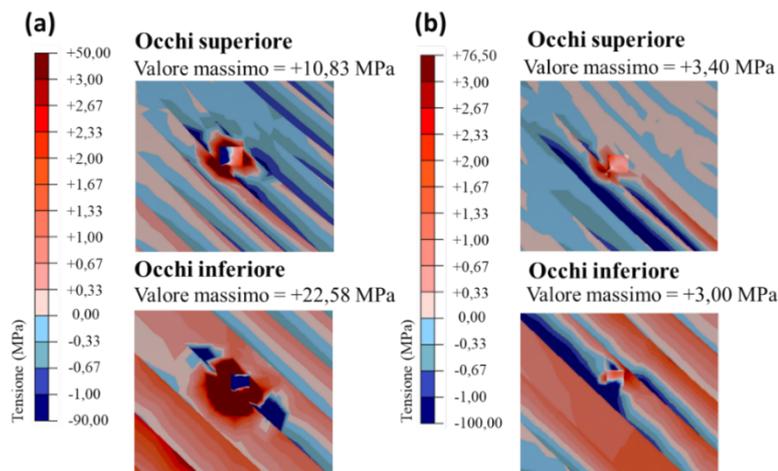


*Figura 10-11: Indicazione del contatto tra il tamburo e la cupola interna.*

Il confronto dei grafici delle tensioni dei due modelli consente di identificare che la base di mattoni e la spinapesce a partire dal livello di 7,00 m consentono: una riduzione dell'estensione degli sforzi di trazione agli sponi, di circa 7,10 m (Figura 11), la riduzione delle tensioni di trazione negli occhi, dall'86,71% in quelle inferiori e dal 68,61% in quelle superiori (Figura 12), e una riduzione dell'area di trazione nella parte inferiore delle vele, di circa 42,95% (Figura 11, indicazione in giallo).

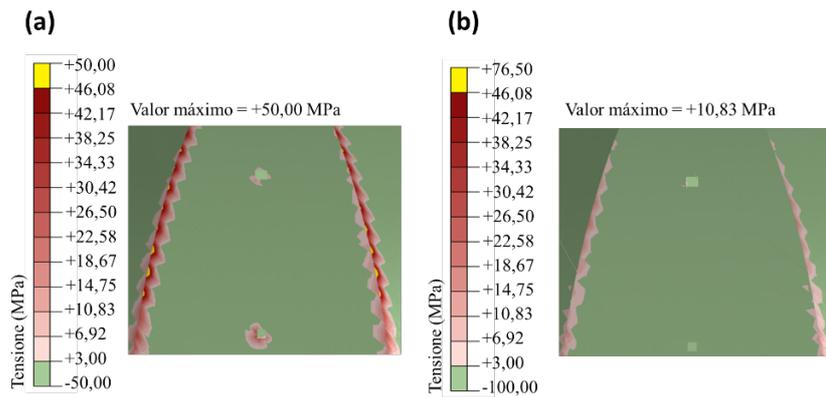


**Figura 12:** Tensioni sull'intradosso della cupola interna del modello 01(a) e del modello 03(b).

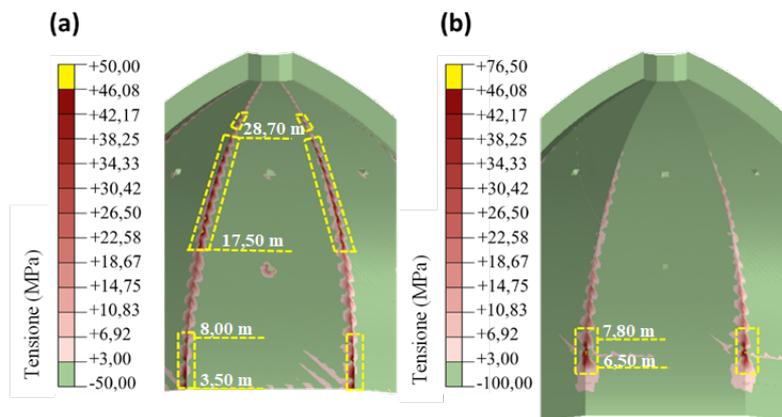


**Figura 12:** Particolare delle tensioni sull'intradosso della cupola interna, nelle regioni degli occhi del modello 01(a) e del modello 03(b).

Analizzando la distribuzione delle tensioni sugli sproni della superficie inferiore dei modelli, la base in mattoni e la posa di spinapesce a partire dal livello di 7,00 m riduce i valori di trazione agli sproni situati tra gli occhi, di circa il 78,34% (Figura 13), e mentre nel modello 01 le tensioni uguali o superiori a +34,00 MPa coprono la maggior parte degli sproni, nel modello 03 questi valori sono concentrati negli sproni inferiori delle vele (Figura 14).

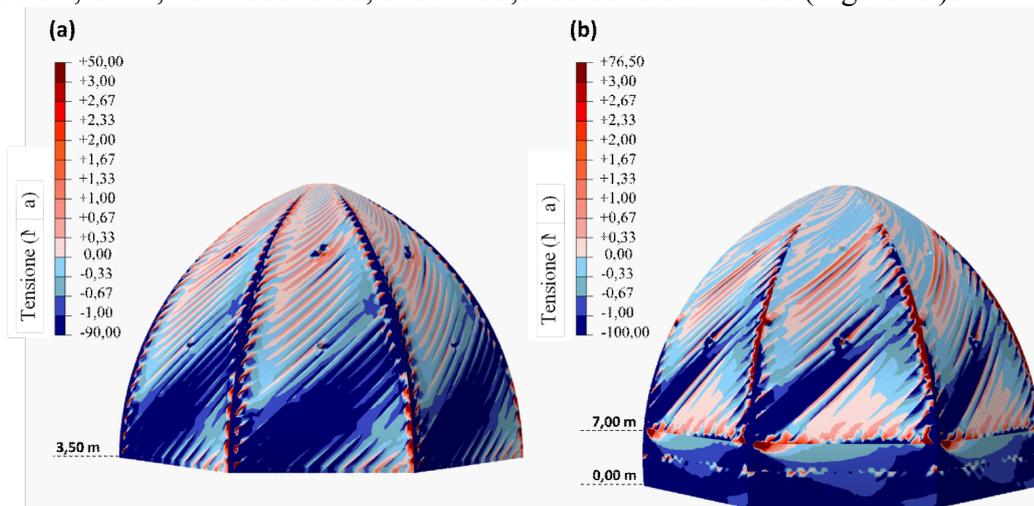


**Figura 13:** Particolare delle tensioni sull'intradosso della cupola interna, nella regione tra gli occhi delle vele del modello 01 (a) e del modello 03(b).



**Figura 14:** Indicazione delle regioni dell'intradosso della cupola interna, le cui tensioni sono uguali o superiori a +34,00 MPa agli sproni del modello 01(a) e del modello 03 (b).

Con il confronto dei grafici delle tensioni all'estradosso della cupola interna, viene identificata l'attenuazione delle regioni compresse nella parte inferiore delle vele. Mentre nel modello 01 la parte compressa inferiore delle vele è di circa 137,90 m<sup>2</sup>, questa area si riduce a 52,15 m<sup>2</sup>, nel modello 03, circa il 37,82% dell'area iniziale (Figura 15).



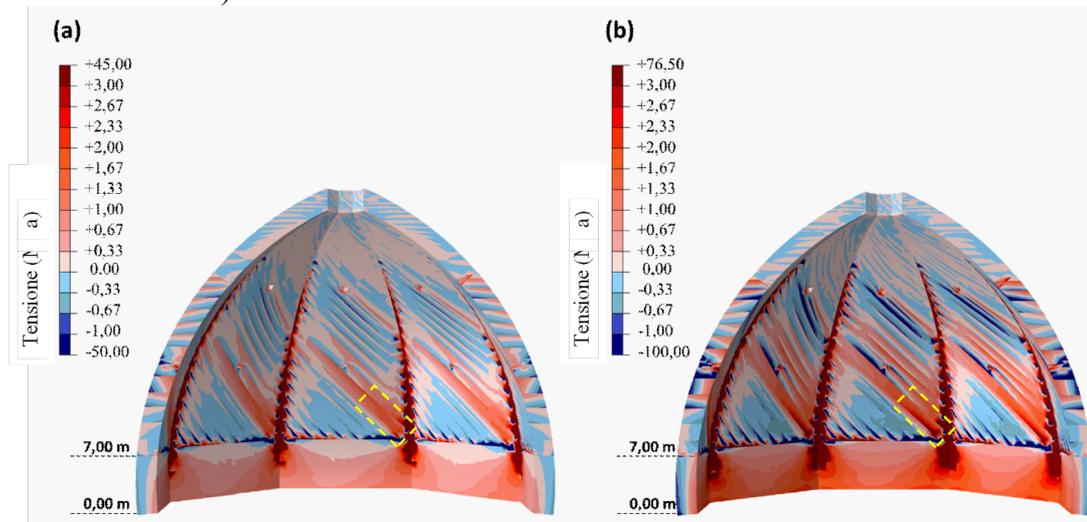
**Figura 15:** Tensioni all'estradosso della cupola interna del modello 01(a) e del modello 03(b).

In questo modo, con i dati analizzati è stato possibile verificare che l'inizio della posa spinapesce dal livello 3,50 metri e l'inserimento di una base di mattoni sovrapposti su piani orizzontali ha garantito la riduzione delle tensioni di trazione nelle regioni periferiche agli occhi, negli sponi e nella regione inferiore delle vele, nonché nella regione di compressione nell'estradosso della cupola interna, cioè il modello 03.

#### 4.2. MODELLO 02 e MODELLO 03

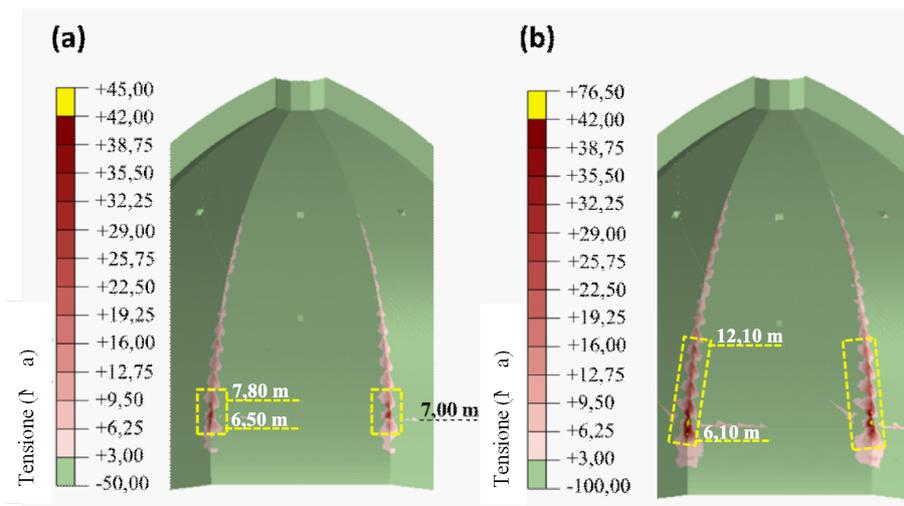
Il confronto tra il Modello 02 e il Modello 03 consiste nella verifica quantitativa delle prestazioni della base in blocchi di pietra utilizzata da Brunelleschi (modello 02) in contrasto con la stessa struttura contenente una base in mattoni (modello 03).

Con i grafici delle tensioni, è possibile verificare che la base realizzata con blocchi di pietra, consenta una riduzione del 38,22% nei valori massimi di trazione vicino agli sponi alla base, indicati in giallo (Figura 16). Vi è anche una riduzione dell'estensione delle tensioni pari o superiore a + 25 MPa agli sponi, di circa 4,70 m (Figura 17) e una riduzione del 41% del valore di trazione massimo del modello (+45,00 MPa nel modello 02, +76,50 MPa del modello 03).



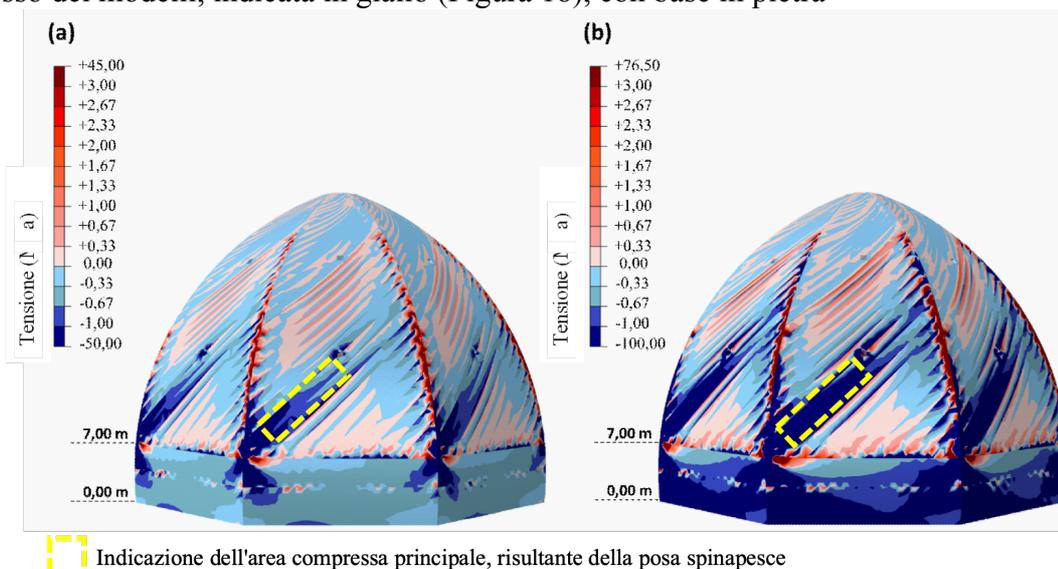
Indicazione della zona di trazione principale, risultante della posa spinapesce.

**Figura 16:** Tensioni sull'intradosso della cupola interna del modello 02(a) e nel modello 03 (b).



**Figura 17:** Indicazione delle regioni dell'intradosso della cupola interna, le cui tensioni sono uguali o superiori a +25,00 MPa agli sproni del modello 02(a) e del modello 03 (b).

Analizzando l'intervallo di valori nel grafico, i valori di compressione massimi diminuiscono di circa il 50% nel modello 02 basato su pietra e si verifica anche una riduzione di 33,43% dei valori di compressione nell'area di maggiori tensioni sugli estradosso dei modelli, indicata in giallo (Figura 18), con base in pietra



**Figura 18:** Tensioni sull'estradosso della cupola interna del modello 02 (a) e del modello 03(b).

Pertanto, è possibile verificare che l'uso di una base di blocchi di pietra sovrapposti su piani orizzontali di livello compreso tra 0,00 mt. a 7,00 mt. (modello 02) in relazione all'uso di mattoni (modello 03), garantisca una diminuzione della tensione degli sproni nell'intradosso della cupola interna, nelle regioni inferiori delle vele e nelle regioni della base nell'estradosso.

### 4.3. MODELLO 02 e MODELLO 04

Supponendo che il Modello 04 fosse quello adottato da Brunelleschi per la costruzione della Cupola, ovvero utilizza le tecniche di posa simultanea dei mattoni di spinapesce e della corda blanda, il suo confronto con il Modello 02 mira a verificare quantitativamente l'influenza dell'uso della corda Blanda per la riduzione delle tensioni ai bordi della cupola interna. Confrontando il grafico delle tensioni dei due modelli, si osserva anche una riduzione dell'estensione delle tensioni di trazione agli sponi del modello 04, di 3,50 m, e una distribuzione di queste tensioni nella parte centrale delle vele (Figura 19).

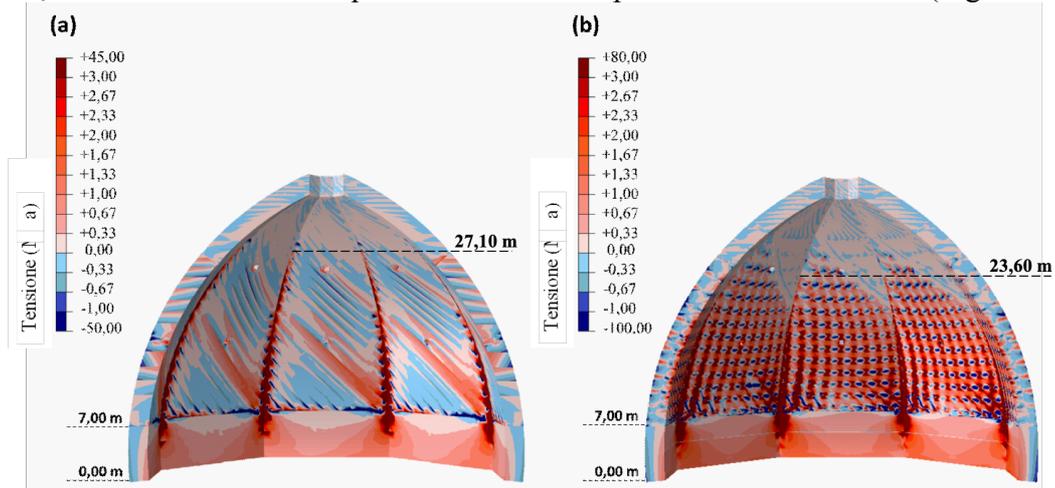


Figura 19: Tensioni sull'intradosso della cupola interna del modello 02(a) e del modello 04(b).

Analizzando le tensioni negli estradossi dei modelli, si osserva anche questa redistribuzione delle tensioni alla parte centrale delle vele (Figura 20), e si è verificato che mentre nel modello 02 le tensioni agli sponi sull'extradossi sono di trazione, negli sponi del modello 04 sono di compressioni, situazione favorevole che ammette che la cupola è realizzata in muratura e ha una grande capacità di resistere alle tensioni di compressione.

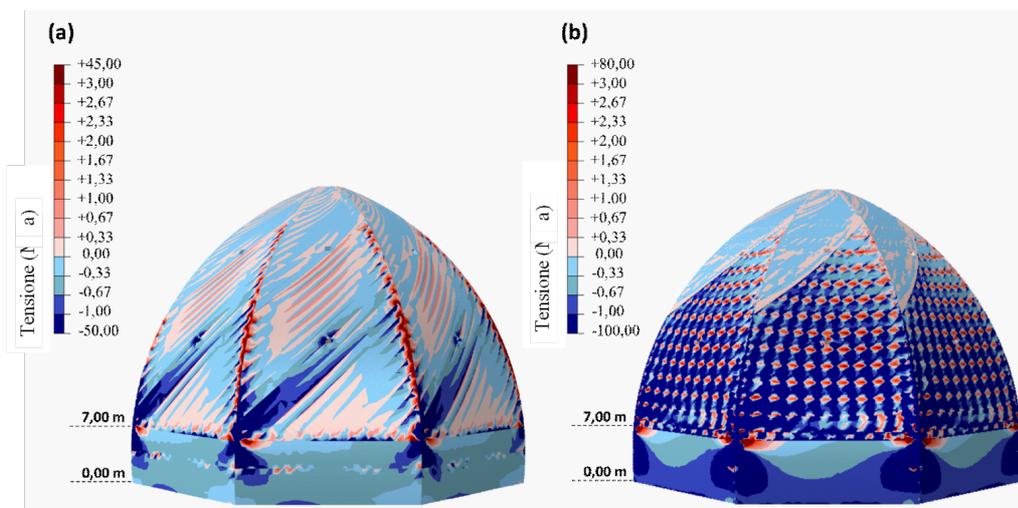
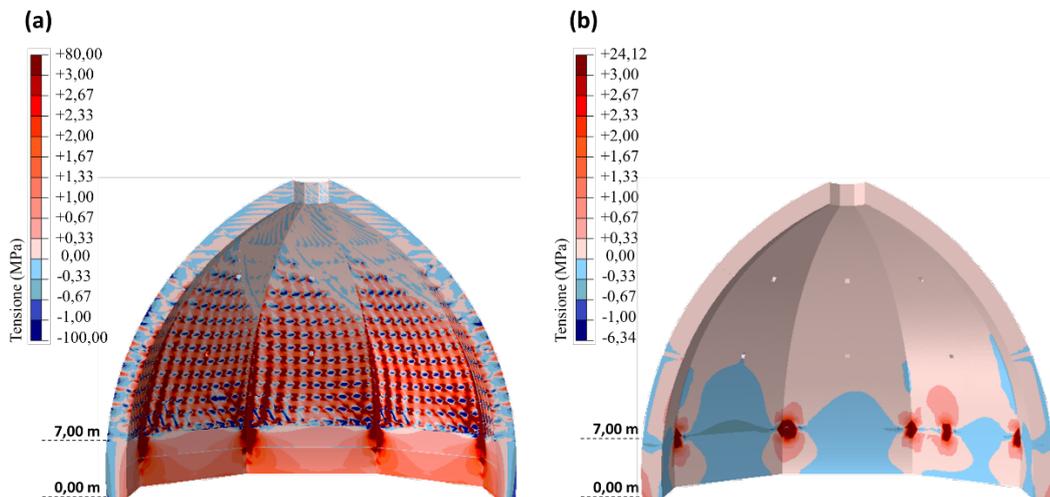


Figura 20: Tensioni sull'extradosso della cupola interna del modello 02(a) e del modello 04(b).

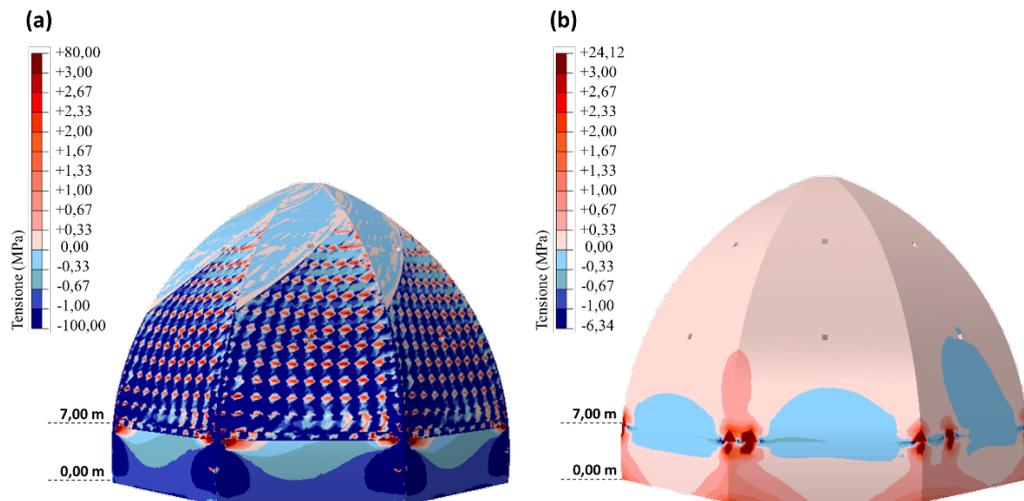
Con i risultati del confronto tra il modello 02 e il modello 04, si è scoperto che la corda blanda permette la redistribuzione delle tensioni degli sproni al centro delle vele e aumenta l'area di compressione sull'estradosso della cupola interna.

#### 4.4. MODELLO 04 e MODELLO 05

Come nei precedenti confronti, il confronto tra il modello 04 e il modello 05 mira a verificare le prestazioni delle tecniche di costruzione utilizzate da Brunelleschi, confrontandolo con il modello convenzionale di mattoni sovrapposto su piani orizzontali. Per entrambi i modelli, la regione dell'intradosso è composta da tensioni di trazione (Figura 21), tuttavia, analizzando le tensioni nell'estradosso dei modelli (Figura 22), mentre nel modello 04 le vele sono compresse, nel modello 05 le vele hanno principalmente tensioni di trazione.



**Figura 21:** Tensioni sull'intradosso della cupola interna del modello 04(a) e del modello 05(b).

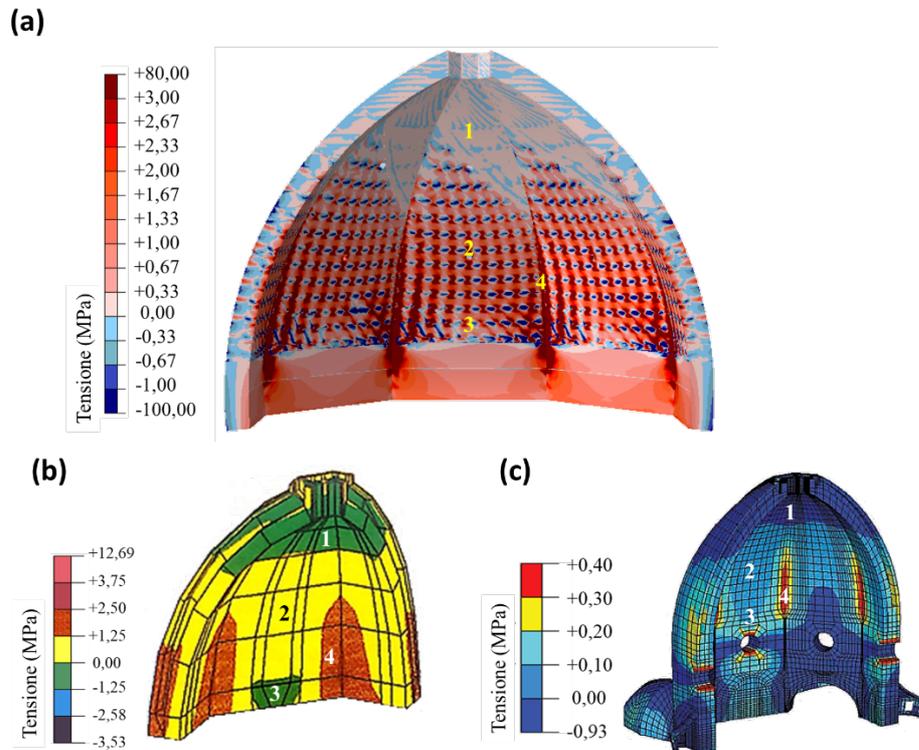


**Figura 22:** Tensioni all'estradosso della cupola interna del Modello 04(a) e del modello 05(b).

Tale evenienza ci consente di affermare che i sistemi costruttivi utilizzati da Brunelleschi consentono alla Cupola di essere autoportante e che la sua costruzione avrebbe potuto essere eseguita senza ponteggi verticali a causa della compressione dei mattoni come avviene nelle cupole di rotazione (Figura 9), con la distribuzione degli sforzi tra elementi adiacenti. La cupola interna del Modello 05 (Figura 22-b), tuttavia, è per lo più tirata, cioè, a meno che fosse usato i ponteggi verticali, la cupola ottagonale non poteva essere costruita con la tecnica convenzionale di mattoni sovrapposti su piani orizzontali. Quindi, si scopre che le tecniche di spinapesce e corda blanda hanno permesso alla cupola di essere costruita senza ponteggi verticali, autoportante, come una cupola di rotazione.

## 5. VALIDAZIONE DEL MODELLO

Per la validazione del modello della cupola interna, è stato utilizzato il modello 04, e i modelli di Fanelli, G.; Fanelli, M. (2004)<sup>9</sup> e Bartoli et al. (2015)<sup>10</sup>, indicati nella Figura 23.



**Figura 23:** Tensioni sull'intradosso della cupola interna del modello 04(a), del modello di Fanelli, G.; Fanelli M. (2004, p.238)<sup>9</sup> (b) e del modello di Bartoli et al. (2015)<sup>10</sup> (c).

Per facilitare l'analisi, la struttura è stata divisa in quattro punti, come indicato. Controllando la indicazione 1, il Modello 04 presenta le zone di compressione (0,00 — -0,33 MPa), nonché nel modello di Fanelli G.; Fanelli M. (2004)<sup>9</sup> e nel modello di Bartoli et al. (2015)<sup>10</sup>. Alla indicazione 2, la regione mediana delle vele situata tra i due occhi, le zone di trazione sono osservate nei modelli bibliografici, così come nel modello 04 (0,00 — +6,25 MPa). Alla base dei veli, nella indicazione 3, approssimativamente all'altitudine di 7,00 m, alcune sottili regioni di compressione nel Modello 04 (-1,00 — -6,00 MPa), così come nel modello di Fanelli, G.; Fanelli, M. (2004)<sup>9</sup> ma non sono identificate nel modello Bartoli et al. (2015)<sup>10</sup>, solo aree di trazione. E alla indicazione 4, sugli sproni, nei tre

modelli sono le zone di trazione, e nel modello 04, questi valori sono tra +3,00 e +10,00 MPa.

Con i numeri immessi nei tre modelli nella Figura 23, la Tabella 3 è stata sviluppata per facilitare il confronto dell'intervallo di valori ottenuti tra i modelli.

**Tabella 3:** Intervallo di valori per ciascuna zona di trazione e compressione valutati nei modelli per la validazione della cupola interna.

	Indicazione 1	Indicazione 2	Indicazione 3	Indicazione 4
	Intervallo di valori (MPa)			
<b>Modello 04</b>	0,00 — -0,33	0,00 — +6,25	-1,00 — -6,00	+3,00 — +10,00
<b>Modello Fanelli e Fanelli (2004)</b>	0,00 — -1,25	0,00 — +1,25	0,00 — -1,25	+1,25 — +12,69
<b>Modello Bartoli et al. (2015)</b>	0,00 — -0,93	0,00 — +0,20	0,00 — +0,20	+0,20 — +0,40

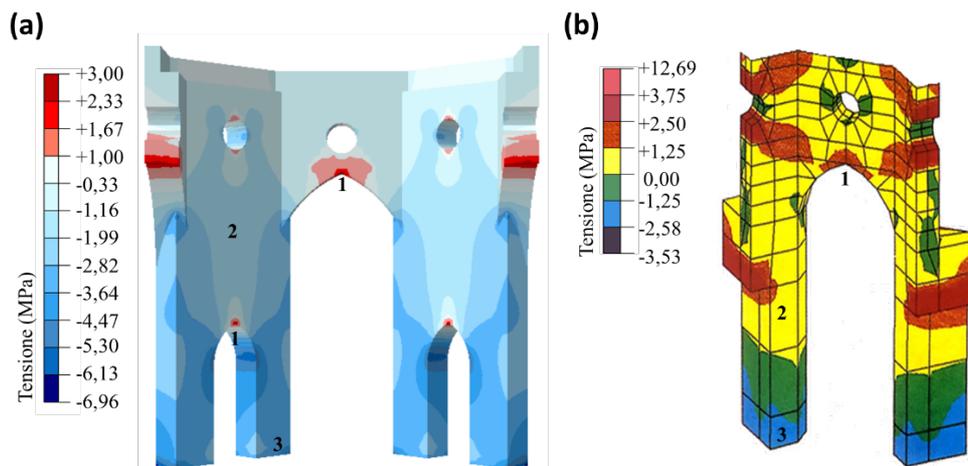
Un'altra caratteristica importante per il confronto del modello 04, sviluppato con i modelli in bibliografia, è che non vi erano prove del modo in cui le tecniche di costruzione della posa spinapesce e corda blanda erano considerate. Poiché non è possibile verificare le zone di discontinuità negli incontri con la corda di spinapesce e blanda nei modelli bibliografici, è probabile che gli autori abbiano definito i flussi di trasmissione delle tensioni a seguito di questi insediamenti di mattoni nel software di analisi. In questo modo, in questo lavoro, è stato preferito suddividere il modello in regioni in cui gli sforzi vengono trasmessi secondo le tecniche di costruzione utilizzate dal Brunelleschi, per garantire la vicinanza dei risultati con coloro che lavorano alla Cupola, poiché sono zone di concentrazione di tensione, e, pertanto, di grande importanza per il controllo delle aree sensibili alle patologie.

Pertanto, si può indicare che i valori trovati sono coerenti e potrebbero aver i più alti di quelli valori massimi della bibliografia per non essere inserito il modello completo della Cupola (che contiene tutti i suoi elementi), ciò comporterebbe un'analisi più dettagliata e complessa, principalmente negli sproni, dove ci sono il “sistema intermedio degli sproni” e che eventualmente viene utilizzato per assorbire le tensioni di trazione.

L'altra validazione è stata sviluppata con il confronto del grafico di distribuzione della tensione della struttura di supporto della Cupola, il tamburo e il settore di base. A tale scopo, sono stato utilizzato un singolo modello geometrico contenente le due strutture e, nell'analisi seguente, questo modello verrà chiamato Modello 06.

Per la validazione del modello 06, è stato utilizzato il modello Fanelli, G.; Fanelli M. (2004)<sup>9</sup>, in quanto il modello Bartoli et al. (2015)<sup>10</sup> tiene conto di altre strutture della Cattedrale, ed è stato anche diviso in punti per facilitare l'analisi.

Rispetto alla bibliografia, si osserva che sia nel modello di Fanelli, G.; Fanelli M. (2004)<sup>9</sup> come nel modello 06, vi sono tensioni di trazione all'apice degli archi dei modelli (indicato al punto 1), e gli intervalli di valori nel modello 06, variano tra +1,25MPa e +12,69 MPa. Nel corpo del Tamburo (punto 2) vengono identificati gli sforzi di trazione, mentre nel modello 06 questi valori sono compressivi. Analizzando le regioni vicine alla base del tamburo (punto 3), in entrambi i modelli siano zone compresse, e nel modello 06, variano tra -1,16 MPa e -6,96 MPa.



**Figura 24:** (a) Tensioni nella regione interna del tamburo nel modello 06(a) e nel modello di Fanelli G.; Fanelli M. (2004, p.238)<sup>9</sup> (b).

Con i numeri inseriti nei tre modelli nella Figura 24, la Tabella 4 è stata sviluppata per facilitare il confronto dell'intervallo di valori ottenuti tra i modelli.

**Tabella 4:** Intervallo di valori per ciascuna zona di tensione e compressione valutati nei modelli per la validazione del tamburo e settore di base.

	<b>Indicazione 1</b>	<b>Indicazione 2</b>	<b>Indicazione 3</b>
	<b>Intervallo di valori (MPa)</b>	<b>Intervallo di valori (MPa)</b>	<b>Intervallo di valori (MPa)</b>
<b>Modello 06</b>	+1,00 — +3,00	0,00 — +1,25	0,00 — -3,53
<b>Modello Fanelli e Fanelli (2004)</b>	+1,25 — +12,69	0,00 — -2,90	-1,16 — -6,96

Pertanto, analizzando i dati nella Tabella 4, è possibile ammettere che nelle zone critiche i valori del modello 06 convergono con il modello in bibliografia, in disaccordo solo con l'indicazione 2, riferendosi al corpo del tamburo. Tuttavia, nonostante il caricamento della cupola interna e di altri elementi come la cupola esterna, il sistema intermedio di contrafforti e la Lanterna sono stati considerati nel modello 06, il modo in cui questi elementi si deformano interferisce anche con i risultati della tensione nel tamburo.

## 6. CONCLUSIONE

Guardando la Cupola di Santa Maria del Fiore e il modo in cui è stata costruita, nel presente lavoro ho cercato di sviluppare un modello numerico della Cupola in grado di fornire analisi delle tensioni della struttura rispetto al proprio peso. Con lo sviluppo tridimensionale degli elementi della Cupola del Brunelleschi, è stato possibile selezionare tre elementi di supporto per l'analisi. Dalle analisi condotte nella cupola interna, è emerso che le tecniche costruttive utilizzate dal Brunelleschi erano essenziali per garantire la costruzione della Cupola senza l'uso di ponteggi verticali.

L'inizio della posa spinapesce al livello di 7,00 metri ha assicurato la riduzione principalmente delle tensioni di trazione negli occhi delle vele della cupola interna (in media 86,71%) e l'estensione di questi sforzi in quelli degli sproni in circa 7,10 metri. Per

quanto riguarda l'uso della base sviluppata in blocchi di pietra nella cupola interna (0,00 metro - 7,00 metri), vi è stata anche una diminuzione della tensione negli sponi, di circa 4,70 metri, e una riduzione de circa 50%, in media, dei valori massimi ottenuti nel modello 02 rispetto al modello 03, contenente una base di mattoni.

Valutando l'uso della tecnica della corda blanda, si è anche scoperto che riduceva l'estensione delle tensioni di trazione agli sponi del modello di circa 3,50 metri e assicurava che la cupola ottagonale potesse essere costruita proprio come una cupola di rotazione.

Confrontando il modello 04 e il tamburo con la bibliografia, è stato osservato che le zone di trazione e compressione sull'intradosso e l'estradosso dei modelli coincidevano con quelle della bibliografia, Fanelli G.; Fanelli M. (2004)<sup>9</sup> e Bartoli et al. (2015)<sup>10</sup> superando alcuni valori indicati alle estremità dei modelli. Nel caso della cupola interna, questi valori sono dovuti alla suddivisione del modello in elementi che hanno permesso il flusso di tensioni legate alla posa spinapesce e alla corda blanda, e all'analisi individuale della cupola interna, che pur considerando il sovraccarico degli altri elementi, non è stata effettuata l'analisi contenente il sistema intermedio degli sponi e cupola esterna e le loro rispettive deformazioni e prestazioni, in quanto richiede un'analisi più attenta e complessa.

Pertanto, la Cupola del Brunelleschi copra diverse aree di conoscenza, come matematica, architettura, ingegneria, geometria, analisi dei materiali da costruzione e gestione delle costruzioni. Come percorso nel rinascimento fiorentino, Filippo Brunelleschi era molto in anticipo sui tempi, responsabile dello sviluppo di un magnifico capolavoro di ingegneria che, ancora oggi, è composto da misteri.

La Cupola del Brunelleschi rimane eretta per 600 anni dopo l'inizio della sua costruzione, sebbene sia stata soggetta a varie condizioni meteorologiche nel corso degli anni, come scariche elettriche, terremoti e tempeste di vento, carichi dinamici che, gli attuali edifici, composti da calcestruzzo armato, sono costantemente deteriorati e crollare, anche di fronte a tutti i progressi scientifici e tecnologici.

## Riferimenti bibliografici

<sup>1</sup> CORAZZI, R.; CONTI, G. *La Cupola di Santa Maria del Fiore raccontata dal suo progettista Filippo Brunelleschi*. Livorno: Sillabe, 2005.

DASSAULTSYSTÈMES®. ABAQUS, 2014.

<sup>2</sup> KING, R. *O Domo de Brunelleschi*. Tradução de S.Duarte. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2013.

<sup>3</sup> CORAZZI, R.; CONTI, G. *Il segreto della Cupola del Brunelleschi a Firenze - The Secret of Brunelleschi's Dome in Florence*. Firenze: Angelo Pontecorboli, 2011.

<sup>4</sup> CORAZZI, R. La curva "lossodromica" e la spina pesce. *GEOMETRIA, COSTRUZIONE, ARCHITETTURA*, giugno 2012.

<sup>5</sup> ERCOLE, A. Modellazione strutturale delle cupole in muratura: Il caso della Chiesa della SS. Trinità di Torino. *Tesi di Laurea Magistrale*, Aprile 2019.

<sup>6</sup> AUTOCAD®. Autodesk®, 2020. Disponivel em: <<https://www.autodesk.com.br/education/free-educational-software>>.

<sup>8</sup> BARBI, L. et al., *Indagine sperimentale sui materiali costituenti la Cupola di Santa Maria del Fiore*. Università di Firenze- Facoltà di architettura- Atti del Dipartimento di Costruzioni, n. 1, 1986.

<sup>9</sup> FANELLI, G.; FANELLI, M. *La Cupola del Brunelleschi: Storia e futuro di una grande struttura*. Firenze: Mandragora, 2004.

<sup>10</sup> BARTOLI, G.; BORRI, C.; BETTI, M. *Numerical Modeling of the Structural Behavior of Brunelleschi's Dome of Santa*. *International Journal of Architectural Heritage: Conservation, Analysis, and Restoration*, p. 24, April 2015. Disponibile em: <<http://dx.doi.org/10.1080/15583058.2013.797038>>.